THE ABEL PRIZE 2019

Det Norske Videnskaps-Akademi har besluttet å tildele Abelprisen for 2019 til

Karen Keskulla Uhlenbeck

ved University of Texas, Austin

“for hennes nybrottsarbeid innen geometriske partielle differensialligninger, gaugeteori og integrerbare systemer, og for den fundamentale innflytelsen av hennes arbeid innen analyse, geometri og matematisk fysikk.”

Karen Keskulla Uhlenbeck er en av grunnleggerne av moderne geometrisk analyse. Hennes perspektiver har gjennomsyret hele dette feltet og har ført til noen av de mest dramatiske fremskrittene i matematikken de siste 40 årene.

Geometrisk analyse er et felt innen matematikken der analyseteknikker og differensialligninger flettes sammen med studiet av geometriske og topologiske problemer. Spesifikt studeres objekter som kurver, overflater, konneksjoner og felt som er kritiske punkter av funksjonaler som representerer geometriske størrelser som energi og volum. For eksempel er minimale overflater kritiske punkter av arealet, og harmoniske avbildninger er kritiske punkter av Dirichlet-energien. Uhlenbecks største bidrag omfatter grunnleggende resulter om minimale overflater og harmoniske avbildninger, Yang-Mills-teori og integrerbare systemer.

Minimale overflater og bobleanalyse

Et viktig redskap innen global analyse forut for Uhlenbecks arbeid, er Palais-Smale kompakthetsvilkår. Dette vilkåret, som var inspirert av tidligere arbeid av Morse, sikrer eksistensen av minimaliserere av geometriske funksjonaler og er vellykket i studiet av endimensjonale domener, som lukkete geodeter.

Uhlenbeck innså at vilkåret til Palais-Smale av topologiske grunner ikke holder for overflater. Artiklene som Uhlenbeck skrev sammen med Sacks om energifunksjonalen for overflateavbildning i en Riemann-manifoldighet, har vært særdeles innflytelsesrik og beskriver i detalj hva som skjer når Palais-Smale-vilkåret brytes. En minimaliserende sekvens av avbildninger konvergerer utenfor en endelig mengde av singulære punkter, og ved hjelp av reskaleringsargumenter beskriver de oppførselen nær singularitetene som *bobler* eller *instantoner*, som er standardløsningene for den minimaliserende avbildningen fra 2-sfæren til målmanifoldigheten.

I høyere dimensjoner skrev Uhlenbeck i samarbeid med Schoen to grunnleggende artikler om minimalisering av harmoniske avbildninger. De presenterte en dyp forståelse av singulariteter av løsninger på ikke-lineære elliptiske partielle differensialligninger. Den singulære mengden, som i tilfellet med overflater bare består av isolerte punkter, blir i høyere dimensjoner erstattet av en mengde med kodimension 3.

Metodene som brukes i disse revolusjonerende artiklene er nå standardverktøy for enhver geometer og analytiker. De har blitt brukt med stor suksess i mange andre partielle differensialligninger og geometriske sammenhenger. Særlig boblefenomenet dukker opp i mange arbeider innen partielle differensialligninger, i studien av Yamabes problem, i Gromovs arbeid på pseudoholomorfe kurver og i fysiske anvendelser av instantoner, særlig innen strengteori.

Gaugeteori og Yang-Mills-ligninger

Uhlenbeck ble interessert i gaugeteori etter å ha hørt et foredrag av Atiyah i Chicago. Hun ble en pioner innen studiet av Yang-Mills-ligninger ut fra et strengt analytisk synspunkt. Hennes arbeid dannet grunnlaget for all senere forskning på området gaugeteori.

Gaugeteori omfatter en hjelpe-vektorbunt over en Riemann-manifoldighet. De grunnleggende studieobjektene er konneksjoner på denne vektorbunten. Etter å ha valgt en trivialisering (gauge) kan en konneksjon beskrives med en matrisevaluert 1-form. Yang-Mills-konneksjoner er kritiske punkter for gauge-invariante funksjonaler. Uhlenbeck stilte opp og løste det fundamentale spørsmålet om å uttrykke Yang-Mills-ligninger som et elliptisk system ved hjelp av den såkalte Coulomb-gaugen. Dette ble utgangspunktet for både Uhlenbecks feirede kompakthetsteorem for konneksjoner med kurvatur avgrenset i L^p og for hennes senere resultater om fjernbare singulariteter for Yang-Mills-ligninger definert på punkterte 4-dimensjonale kuler. Teorien om fjernbare singulariteter for Yang-Mills-ligninger i høyere dimensjoner ble mye senere utført av Gang Tian og Terence Tao. Uhlenbecks kompakthetsteorem var avgjørende i ikke-abelsk hodgeteori og særlig for beviset for ektheten av Hitchins avbildning og Corlettes viktige resultat om eksistensen av ekvivariante harmoniske avbildninger.

Et annet betydelig resultat av Uhlenbeck er hennes felles arbeid med Yau om eksistensen av hermitiske Yang-Mills-konneksjoner på stabile holomorfe vektorbunter over komplekse n-manifoldigheter, som generaliserer et tidligere resultat fra Donaldson om komplekse overflater. Dette resultatet fra Donaldson, Uhlenbeck og Yau knytter sammen utviklinger innen differensialgeometri og algebraisk geometri, og er et grunnleggende resultat for anvendelse av heterotiske strenger innen partikkelfysikk.

Uhlenbecks ideer la det analytiske grunnlaget for anvendelsen av gaugeteori innen geometri og topologi, for det viktige arbeidet til Taubes om liming av selvduale 4-manifolder, for det banebrytende arbeidet til Donaldson om gaugeteori og 4-dimensjonal topologi, og mange andre arbeider innenfor dette området. Boken som Uhlenbeck skrev sammen med Dan Freed, "Instantons and 4-Manifold Topology", skolerte og inspirerte en hel generasjon av differensial-geometere. Hun fortsatte å arbeide innenfor dette området, og kom særlig fram til et viktig resultat sammen med Lesley Sibner og Robert Sibner om ikke-selvduale løsninger på Yang-Mills-ligninger.

Integrerbare systemer og harmoniske avbildninger

Studiet av integrerbare systemer har sine røtter i det 19. århundrets klassiske mekanikk. Ved hjelp av gaugeteoriens språk innså Uhlenbeck og Hitchin at harmoniske avbildninger fra overflater til homogene rom kommer i 1-dimensjonale parameteriserte familier. Basert på denne observasjonen beskrev Uhlenbeck algebraisk harmoniske avbildninger fra sfærer til Grasmann-manifoldigheter og knyttet dem til et uendeligdimensjonalt integrerbart system og Virasoro virkninger. Dette nyskapende arbeidet førte til en rekke grunnleggende artikler av Uhlenbeck og Chuu-Lian Terng om dette temaet og til dannelsen av en aktiv og fruktbar matematisk skole.

Betydningen av Uhlenbecks sentrale arbeid strekker seg langt utover geometrisk analyse. En svært innflytelsesrik tidlig artikkel ble viet studiet av regularitetsteori i et system av ikke-lineære elliptiske ligninger, som er relevant for studiet av den kritiske avbildningen av energifunksjonaler av høyere orden mellom Riemann-manifolder. Dette arbeidet viderefører tidligere resultater av Nash, De Giorgi og Moser om regulariteten av løsninger på ikke-lineære ligninger til også å omfatte løsningen på systemer.

Karen Uhlenbecks pionerarbeid har hatt en fundamental innflytelse på samtidens analyse, geometri og matematisk fysikk, og hennes ideer og lederskap har omskapt det matematiske landskapet i sin helhet.